УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

©Ю. А. Алхутов

Настоящая работа посвящена разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях.

Начало изучению параболических уравнений в нецилиндрических областях было положено И.Г.Петровским. Им установлены необходимые и достаточные условия на порядок касания граничной поверхности гиперплоскостью $t = const$ для разрешимости по Перрону задачи Дирихле по отношению к уравнению теплопроводности [1]. Позже эти результаты были обобщены Е.М.Ландисом на области произвольной структуры [2] (см. также[3]). Разрешимость первой краевой задачи для параболических уравнений высокого порядка в соболевских пространствах исследована В.П.Михайловым [4].

Случай общих краевых задач в областях специального вида изучен В.А.Кондратьевым [5]. Им впервые был введен и описан класс весовых пространств, в которых естественно искать решение краевой задачи в нецилиндрической области.

В данной работе приводится точное описание весовых пространств разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Прежде чем переходить к более детальному изложению, приведем используемые определения и обозначения.

Всюду далее E_{n+1} означает $(n+1)$-мерное евклидово пространство точек $(t,x) = (t,x_1,\dots,x_n)$, $\Gamma(\Omega)$-параболическую границу области $\Omega \subset E_{n+1}$, а $L = \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$- оператор теплопроводности.

Мы будем говорить, что $\Omega \subset E_{n+1}$ является P^- областью с основанием $D \subset E_n$ (E_n-евклидово пространство точек $x = (x_1,\dots,x_n)$), если для любого $\tau < 0$ сечение Ω гиперплоскостью $t = \tau$ совпадает с $D(\tau) = \{x : \frac{1}{2}(-\tau)^{-1/2}x \in D\}$.

Аналогично, $\Omega \subset E_{n+1}$ называется P^+-областью с основанием $D \subset E_n$, если ее зеркальное отражение через гиперплоскость $t = 0$ является P^--областью с тем же основанием.

Таким образом, P^- и P^+ области имеют изолированную характеристическую точку, совпадающую с началом координат. В дальнейшем мы будем считать, что основание $D \subset E_n$ является ограниченной областью с дважды гладкой границей ∂D.

Пусть далее $\Omega_T = \{(t,x) : (t,x) \in \Omega, |t| < T, T > 0\}$, где Ω является P^- (или P^+) областью, $p > 1, k \geq 0$-целое число и $w(t)$-положительная, непрерывная на $(0,\infty)$ и четная на $(-\infty,\infty)$ функция, удовлетворяющая при $t \neq 0$ условию

$$C_1 w(t) \leq w(2t) \leq C_2 w(t), \tag{1}$$

где C_1, C_2-некоторые положительные постоянные. Тогда $H_w^{k,p}(\Omega_T)$-это пространство, полученное пополнением множества гладких в $\overline{\Omega}_T$ функций, равных нулю на $\Gamma(\Omega_T)$, по норме

$$\| u \|_{H_w^{k,p}(\Omega_T)} = \left(\int\limits_{\Omega_T} \sum_{l=0}^{k} \sum_{2m_0+|m|=l} w(t)|t|^{lp/2}|D_x^m D_t^{m_0} u|^p dxdt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Если $w(t) = |t|^\alpha$, то сответствующие пространства будем обозначать через $H_\alpha^{k,p}(\Omega_T)$. Отметим, что в случае $p = 2$ они были введены в [5].

В последующем $W_p^{2,1}(\Omega)$ $(p > 1)$-банахово пространство с конечной нормой

$$\| u \|_{W_p^{2,1}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n |u_{x_i x_j}|^p + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p + |u_t|^p + |u|^p \Big) dx dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

а $W_{p,0}^{2,1}(\Omega)$- пополнение по норме $W_p^{2,1}(\Omega)$ гладких функций, равных 0 на $\Gamma(\Omega)$.

Рассмотрим теперь задачу

$$Lu = f \text{ в } \Omega_T, \;\; u \,|_{\Gamma(\Omega_T)} = 0 \tag{2}$$

и сформулируем полученные результаты.

Для этого обозначим через $\nu^\mp$ первые собственные числа задач

$$\sum_{i=1}^n (\exp(\mp|\xi|^2) v_{\xi_i}^\mp)_{\xi_i} + \nu^\mp \exp(\mp|\xi|^2) v^\mp = 0, \;\; v^\mp \,|_{\partial D} = 0, \tag{3}$$

где $D \subset E_n$-ограниченная область, и положим $a = p\nu^-/4 + n/2$, $b = -p\nu^+/4 + n/2$.

Теорема 1 . *Для того, чтобы в P^- (соответственно P^+) области Ω с основанием D было выполнено неравенство*

$$\| u \|_{H_{w_0}^{2,p}(\Omega_T)} \leq c \, \| Lu \|_{H_w^{0,p}(\Omega_T)} \tag{4}$$

с постоянной c, не зависящей от u, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sup_{t \in (0,T)} \int_0^t w_0(\tau) \tau^a d\tau \left(\int_t^T (w(\tau)\tau^a)^{-\frac{1}{p-1}} d\tau \right)^{p-1} = M_1 < \infty \tag{5}$$

и

$$\sup_{t \in (0,T)} \int_t^T w_0(\tau) \tau^b d\tau \left(\int_0^t (w(\tau)\tau^b)^{-\frac{1}{p-1}} d\tau \right)^{p-1} = M_2 < \infty \tag{6}$$

соответственно.

Отметим, что оценка (4) в $H_\alpha^{2,2}$ впервые установлена В.А.Кондратьевым [5]. Условия (5) и (6) были использованы Б.Макенхауптом [6] при получении двухвесовых неравенств Харди.

Из оценки (4) вытекает разрешимость задачи (2) в пространстве $H_{w_0}^{2,p}(\Omega_T)$.

Теорема 2 . *Пусть в P^- (соответственно P^+) области Ω выполнено условие (5) (соответственно (6)). Тогда задача (2) при $f \in H_w^{0,p}(\Omega_T)$ разрешима в пространстве $H_{w_0}^{2,p}(\Omega_T)$. Если Ω является P^- областью, то решение единственно.*

В случае P^+ области решение задачи (2) при выполнении только условия (6), вообще говоря, неединственно.

Теорема 3 *Если Ω является P^+ областью, то для единственности решения задачи (2) в $H^{2,p}_{w_0}(\Omega_T)$ необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_0 w_0(\tau)\tau^k d\tau = \infty \tag{7}$$

Аналогичные результаты получены также для слабых решений задач

$$Lu = f + \sum_{i=1}^{n}(f_i)_{x_i}, \quad u|_{\Gamma(\Omega_T)} = 0,$$

а теорема 2 справедлива и для уравнений с переменными коэффициентами при условии «малости» разброса собственных чисел матрицы старших коэффициентов в окрестности начала координат.

Мы начнем с вывода вспомогательных весовых оценок в $H^{2,p}_w$ для оператора L в нецилиндрической области. Поскольку доказательства этих оценок в P^+ и P^- областях аналогичны, мы будем все рассуждения более подробно излагать для случая P^- области и комментировать соответствующие результаты для P^+ областей. Всюду далее $\Omega^\delta_T = \Omega_T \backslash \Omega_\delta$ ($\delta < T$), а через c мы будем обозначать положительные постоянные, значения которых для нас несущественны.

Рассмотрим вначале в P^- области Ω задачу

$$Lu = f \text{ в } \Omega^\delta_T, \quad u|_{\Gamma(\Omega^\delta_T)} = 0, \quad f \in L_p(\Omega^\delta_T) \tag{8}$$

Лемма 1 . *Задача (8) однозначно разрешима в $W^{2,1}_{p,0}(\Omega^\delta_T)$ и для любой функции $v \in W^{2,1}_{p,0}(\Omega^\delta_T)$ справедливо неравенство*

$$\| v \|_{H^{2,p}_{w_0}(\Omega^\delta_T)} \leq c \left(\| Lv \|_{H^{0,p}_{w_1}(\Omega^\delta_T)} + \| v \|_{H^{0,p}_{w_0}(\Omega^\delta_T)} \right), \tag{9}$$

где $w_0(t)$ удовлетворяет условию (1), $w_1(t) = w_0(t)|t|^p$, а постоянная c не зависит от v и δ.

Доказательство. Совершим замену переменных

$$\xi_i = \frac{x_i}{2\sqrt{-t}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \eta = \ln\frac{1}{(-t)}, \tag{10}$$

сохранив за функцией v то же обозначение. Тогда оператор теплопроводности запишется в виде

$$\tilde{L}v = \frac{1}{4}e^{\eta}(H_\xi v - 4v_\eta),$$

где

$$H_\xi = \sum_{i=1}^{n} \exp(|\xi|^2)\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\exp(-|\xi|^2)\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right) \tag{11}$$

При этом область Ω^δ_T отобразится в цилиндр $Q^\delta_T = D \times (\ln\frac{1}{T}, \ln\frac{1}{\delta})$. Поскольку $\tilde{L}$ является равномерно параболическим в Q^δ_T оператором с бесконечно дифференцируемыми в E_{n+1} коэффициентами, а граница ∂D принадлежит классу C^2, то отсюда следует, что исходная задача (8) однозначно разрешима в $W^{2,1}_{p,0}(\Omega^\delta_T)$ при любом $\delta \in (0, T)$ (см. напр.[7]).

Далее, положим $L_1 v = H_\xi v - 4v_\eta$ и рассмотрим функцию

$$u(\eta, \xi) = v(\eta, \xi)\exp(-(n+2)\eta/2p).$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$L_1 u = (4e^{-\eta}\tilde{L}v + 2\frac{n+2}{p}v)e^{-(n+2)\eta/2p} \tag{12}$$

Продолжим функции u и v нулем ниже гиперплоскости $\eta = \ln\frac{1}{T}$ и, положив $Q^\delta = D \times (-\infty, \ln\delta^{-1})$, $Q = D \times (-\infty, \infty)$, разобьем Q на цилиндры $Q_k = D \times [k, k+1)$, так что $Q = \cup_{k=-\infty}^{\infty} Q_k$. В силу коэрцитивной оценки в $W_p^{2,1}$ (см.[7]), будем иметь

$$\| u \|_{W_p^{2,1}(Q_k^\delta)} \leq c(\| Lu \|_{L_p(\tilde{Q}_k^\delta)} + \| u \|_{L_p(\tilde{Q}_k^\delta)}),$$

где $Q_k^\delta = Q_k \cap Q^\delta$, $\tilde{Q}_k^\delta = Q_k^\delta \cup Q_{k-1}^\delta$, а постоянная c не зависит от u, δ, k. То есть, в силу условия (1)

$$\sum_{l=0}^{2} \sum_{2m_0+|m|=l} \| D_\eta^{m_0} D_\xi^m u \|_{H_{\tilde{w}_0}^{0,p}(Q_k^\delta)} \leq c(\| Lu \|_{H_{\tilde{w}_0}^{0,p}(\tilde{Q}_k^\delta)} + \| u \|_{H_{\tilde{w}_0}^{0,p}(\tilde{Q}_k^\delta)}),$$

где $\tilde{w}_0(\eta) = w_0(e^{-\eta})$.

Суммируя по k эти неравенства и пользуясь (12), после возвращения к переменным (t, x) и исходной функции v, получим (9). Лемма доказана.

Замечание. Если Ω является P^+ областью, то для доказательства леммы нужно вместо (10) совершить замену

$$\xi_i = x_i/2\sqrt{t}, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ \ \eta = \ln t.$$

Теперь нам необходимо оценить весовую L_p-норму функции v в правой части (9). Это оказывается тесно связанным с исследованием функции Грина первой краевой задачи для оператора L в Ω. Пусть $\Gamma(t, \tau, x, y)$-функция Грина первой краевой задачи оператора $L = \Delta_y - \partial/\partial\tau$ в Ω.

Лемма 2 . *Если Ω является P^- областью, то справедливы неравенства*

$$\Gamma(t, \tau, x, y) \leq c(n)G(t-\tau, x-y) \tag{13}$$

и

$$\Gamma(t, \tau, x, y) \leq c(n, \Omega, \gamma) \ |t|^{-n/2-\mu_1/4}|\tau|^{\mu_1/4} \ \textit{при} \ t \leq (1+\gamma)\tau, \tag{14}$$

где $\gamma > 0$, $\mu_1 = \nu^-$-первое собственное число задачи (3), а

$$G(t, x) = \chi(-t)(-t)^{-n/2}exp(|x|^2/4t),$$

здесь ($\chi(t)$-функция Хевисайда).

Если Ω является P^+ областью, то справедливы неравенства (13) и

$$\Gamma(t, \tau, x, y) \leq c(n, \Omega, \gamma)|t|^{-n/2+\mu_1/4}|\tau|^{-\mu_1/4} \ \textit{при} \ \tau \geq (1+\gamma)t \tag{14.1}$$

где $\gamma > 0$, $\mu_1 = \nu^+$-первое собственное число задачи (3).

Доказательство. Оценка (13) следует из определения функции Грина. Для доказательства (14) разложим $\Gamma(t, \tau, x, y)$ в ряд по собственным функциям задачи (3).

Из общей теории самосопряженных операторов (см. напр. [8]) известно, что спектр соответствующей задачи (3) дискретен, собственные числа положительны и в пространстве $L_2(D)$ с весом $\exp(-|\xi|^2)$ существует ортонормированный базис $\{p_k(\xi)\}$ из собственных функций, отвечающих собственным значениям $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \dots$. Кроме того, кратность μ_1 равна единице. Оператор H_ξ (см.(11)), фигурирующий в (3), возникает, как показано в лемме 1, при замене переменных (10).

Зафиксируем $\tau < 0$, точку (t,x) и вычислим для $\tau > t$ коэффициенты Фурье $u_k(t,x,\tau)$ функции $\Gamma(t,\tau,x,y)$ по системе собственных функций $\{P_k(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}})\}$ в $D(\tau) = \{y : \frac{y}{2\sqrt{-\tau}} \in D\}$ (D-основание Ω). Так как $D(\tau)$ является гомотетией D, то

$$u_k(t,x,\tau) = 2^{-n} \int\limits_{D(\tau)} G(\tau,y)p_k(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}})\Gamma(t,\tau,x,y)dy$$

С другой стороны, согласно свойству функции Грина, $u_k(t,x,\tau)$ по переменным (t,x) является решением задачи

$$L^* u_k = 0 \text{ в } \Omega\backslash\Omega_{|\tau|},\ u_k\,|_{\partial\Omega} = 0,\ u_k\,|_{t=\tau} = 2^{-n}G_n(\tau,x)p_k(\frac{x}{2\sqrt{-\tau}}),$$

где $L^* = \Delta_x + \frac{\partial}{\partial t}$. По принципу максимума решение этой задачи единственно. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$u_k(t,x,\tau) = 2^{-n}G(t,x)(-t)^{-\mu_k/4}(-\tau)^{\mu_k/4}p_k(\frac{x}{2\sqrt{-t}})$$

Значит при $\tau > t$ можно формально положить

$$\Gamma(t,\tau,x,y) = 2^{-n}G(t,x)\sum_{k=1}^{\infty}(-\tau)^{\mu_k/4}(-t)^{-\mu_k/4}p_k(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}})p_k(\frac{x}{2\sqrt{-t}}). \qquad (15)$$

Ввиду гладкости ∂D ряд (15) при фиксированных (t,x), τ при $\tau > t$ сходится равномерно в $\overline{D}(\tau)$ (см. напр.[8]).

Покажем, что для любых положительных $\Theta_1, \Theta_2, T, \delta, \varepsilon$, удовлетворяющих условию $0 < \delta < \Theta_1$, $\Theta_2 < T$ и $\Theta_1 - \Theta_2 > \varepsilon$ сходимость будет равномерной при $(\tau,y) \times (t,x) \in \overline{\Omega}^{\delta}_{\Theta_1} \times \overline{\Omega}^{\Theta_2}_{T}$.

Действительно, согласно свойствам собственных функций (см. напр. [9]), ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-p}p_k^2(\xi),$$

где $p = p(n)$, сходится равномерно в $\overline{D}$. Далее, как нетрудно видеть, для любого $A > 1$

$$\sup_{k=1,2,\dots} \mu_k^p A^{-\mu_k/4} = c(p,A) < \infty \qquad (16)$$

Поэтому при $(\tau,y) \times (t,x) \in \overline{\Omega}^{\delta}_{\Theta_1} \times \overline{\Omega}^{\Theta_2}_{T}$ правая часть (15) мажорируется выражением

$$\mathrm{const}\,G(t,x)\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-p}p_k^2(\frac{x}{2\sqrt{-t}})}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-p}p_k^2(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}})}.$$

Этим равномерную сходимость можно считать доказанной. Проводя теперь аналогичные рассуждения и пользуясь (16), получим (14). Аналогично устанавливается оценка (14.1). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь в P^- области Ω с основанием D неотрицательное ядро $Q(t,\tau,x,y)$, непрерывное вне диагонали $(\tau,y)=(t,x)$ и предположим, что существуют постоянные $c>0$, $\beta>1$, $s\in(0,n+2)$ и $\gamma\in(-\infty,\infty)$, для которых

$$Q(t,\tau,x,y)\le\begin{cases} cG_{s,\beta}(t-\tau,x-y), & \text{если } 2\tau<t \\ c|t|^{-s/2-\gamma}|\tau|^{\gamma}, & \text{если } 2\tau>t, \end{cases} \tag{17}$$

где $G_{s,\beta}(\tau,y)=\chi(-\tau)(-\tau)^{-s/2}\exp(|y|^2/4\beta\tau)$.Тогда справедливо следующее утверждение:

Лемма 3 . *Пусть $T>0$, $\delta\in(0,T)$, $a=p\gamma+n/2$, $b=p\gamma+\frac{n}{2}+\frac{s-n}{2}p$, весовые функции $w_0(t)$, $w(t)$ удовлетворяют условиям (1) и*

$$\sup_{t\in(0,T)}\left(\int\limits_0^t w_0(\tau)\tau^a d\tau\right)\left(\int\limits_t^T (w(\tau)\tau^b)^{-\frac{1}{p-1}}d\tau\right)^{p-1}=c_0<\infty, \tag{18}$$

тогда для любой функции $f\in L_p(\Omega_T^\delta)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega_T^\delta} w_0(\tau)|\int\limits_{\Omega_T^\delta} Q(t,\tau,x,y)f(t,x)dxdt|^p dyd\tau\le c\int\limits_{\Omega_T^\delta}|f|^p w(t)dxdt \tag{19}$$

с постоянной c, не зависящей от f и δ.

Доказательство. Не ограничивая в общности, будем считать, что $f\ge0$ в Ω, $f\in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $f=0$ при $t\le -T$. Положим $A_1(\tau)=\{(t,x):(t,x)\in\Omega_T^\delta,\ \ t>2\tau\}$, $A_2(\tau)=\Omega_T^\delta\backslash A_1(\tau)$,

$$I_i(\tau,y)=\int\limits_{A_i(\tau)} Q(t,\tau,x,y)f(t,x)dxdt,$$

где $i=1,2$. Обозначим через $\mathcal{I}$ выражение в левой части (19) и рассмотрим интегралы

$$\mathcal{I}_i=\int\limits_{\Omega_T^\delta} w_0(\tau)(I_i(\tau,y))^p dyd\tau,\ \ i=1,2.$$

Тогда

$$\mathcal{I}\le\mathrm{const}(\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2). \tag{20}$$

Оценим вначале $\mathcal{I}_1$. В силу неравенства Гельдера

$$(I_1(\tau,y))^p\le\int\limits_{A_1(\tau)} Q(t,\tau,x,y)f^p(t,x)dxdt\left(\int\limits_{A_1(\tau)} Q(t,\tau,x,y)dxdt\right)^{p-1}.$$

Далее, поскольку

$$\int\limits_{E_n} G_{s,\beta}(t-\tau,x-y)dx=\mathrm{const}(\tau-t)^{\frac{n-s}{2}},\ \ t<\tau,$$

то заменяя τ на $-\nu$, t на $-\Theta$, согласно оценке (17) получим

$$\mathcal{I}_1\le c\int\limits_\delta^T w_0(\nu)\nu^{\frac{n-s+2}{2}(p-1)}\left(\int\limits_\nu^{2\nu}(\Theta-\nu)^{\frac{n-s}{2}}g(\Theta)d\Theta\right)d\nu,$$

где $g(\alpha) = \int\limits_{D(\alpha)} f^p(-\alpha, x)dx$, а $D(\alpha) = \Omega \cap \{t = -\alpha\}$. Или, в силу (1)

$$\mathcal{I}_1 \le c \int\limits_{\delta}^{T} \left(\int\limits_{\nu}^{2\nu} w_0(\Theta)\Theta^{\frac{n-s+2}{2}(p-1)}(\Theta - \nu)^{\frac{n-s}{2}} g(\Theta)d\Theta \right) d\nu.$$

Меняя порядок интегрирования с учетом того, что $g(\Theta) = 0$ при $\Theta > T$, после несложных вычислений будем иметь

$$\mathcal{I}_1 \le c \int\limits_{\delta}^{T} w_0(\nu)\nu^{\frac{n-s+2}{2}p} g(\nu)d\nu.$$

Из (1) и (18) следует, что $w_0(\nu) \le cw(\nu)\nu^{-p+b-a}$. То есть

$$\mathcal{I}_1 \le c \int\limits_{\delta}^{T} w(\nu)g(\nu)d\nu = c \int\limits_{\Omega_T^\delta} w(t)f^p(t,x)dxdt.$$

Перейдем к оценке $\mathcal{I}_2$. Согласно (17)

$$I_2(\tau, y) \le c|\tau|^\gamma \int\limits_{A_2(\tau)} |t|^{-s/2-\gamma} f(t,x)dxdt.$$

Значит, по неравенству Гельдера

$$\mathcal{I}_2 \le c \int\limits_{\delta}^{T} w_0(\tau)\tau^{p\gamma+n/2} \left(\int\limits_{\tau}^{T} t^{-\gamma-n/2p+(n-s)/2} (\int\limits_{D(t)} f^p(-t,x)dx)dt \right)^p d\tau.$$

Применяя здесь двухвесовое неравенство Харди (см. напр.[6]), в силу (18) найдем, что

$$\mathcal{I}_2 \le c \int\limits_{\Omega_T^\delta} w(t)f^p(t,x)dxdt.$$

Учитывая теперь в (20) оценки $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$, получим (19). Лемма доказана.

Замечание. Пусть в условиях леммы 3 $a = -\frac{sp}{2} - p\gamma + \frac{n}{2}$, $b = -\gamma p - \frac{n}{2}(p-1)$, весовые функции удовлетворяют условиям (1) и

$$\sup_{t\in(0,T)} (\int\limits_{t}^{T} w_0(\tau)\tau^a d\tau)(\int\limits_{0}^{t} (w(\tau)\tau^b)^{\frac{1}{p-1}} d\tau)^{p-1} = c_1 < \infty.$$

Тогда, как и выше, для произвольной функции $f \in L_p(\Omega_T^\delta)$, равной нулю в $\Omega \backslash \Omega_\delta$, можно показать справедливость неравенства

$$\int\limits_{\Omega_T^\delta} w_0(t) | \int\limits_{\Omega_T^\delta} Q(t,\tau,x,y)f(\tau,y)dyd\tau|^p dxdt \le c \int\limits_{\Omega_T^\delta} w(t)|f(t,x)|^p dxdt$$

с постоянной c, не зависящей от f и δ.

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть вначале Ω является P^-- областью, выполнено условие (5) и $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_T^\delta)$. В силу интегрального представления с помощью функции Грина

$$u(\tau, y) = -\int\limits_{\Omega_T^\delta} \Gamma(t, \tau, x, y)(Lu)(t, x)dxdt.$$

Воспользуемся оценками (13), (14) леммы (2) и применим неравенство (19) с ядром $\Gamma(t, \tau, x, y)$. Так как в этом случае постоянные a и b леммы 3 совпадают и равны $n/2 + p\nu^-/4$, то условие (18) совпадает с (5), которое по предположению выполнено. Значит

$$\| u \|_{H^{0,p}_{w_0}(\Omega_T^\delta)} \leq c \| Lu \|_{H^{0,p}_{w}(\Omega_T^\delta)}$$

с постоянной c, не зависящей от u и δ. То есть, в силу (9)

$$\| u \|_{H^{2,p}_{w_0}(\Omega_T^\delta)} \leq c \| Lu \|_{H^{0,p}_{w}(\Omega_T^\delta)}. \tag{21}$$

Так как константа c не зависит от u и δ, то отсюда следует (4).

Совершенно аналогично с помощью замечания к лемме 3 доказывается (4) и в случае P^+ области Ω. Достаточность доказана.

Необходимость. Рассмотрим случай P^- области Ω и предположим, что для любой функции $f \in H^{0,p}_w(\Omega_T)$ справедливо неравенство (4). Покажем, что тогда выполнено условие (5).

Положим $f(t) > 0$ и

$$u(t, x) = (-t)^{\mu_1/4} p_1^-\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right) \int\limits_{-t}^{T} f(z) z^{-\mu_1/4} dz,$$

где $\mu_1 = \nu^-$-первое собственное число, а $p_1^-(\xi)$-первая собственная функция соответствующей задачи (3). Нетрудно убедиться, что

$$Lu = -f(-t)p_1^-\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right) \text{ в } \Omega_T, \quad u\,|_{\Gamma(\Omega_T)} = 0.$$

Согласно сделанному предположению должно выполняться неравенство

$$\int\limits_0^T \tau^a w_0(\tau) \left(\int\limits_\tau^T f(z) z^{-\mu_1/4} dz \right)^p d\tau \leq c \int\limits_0^T f^p(z) z^{n/2} w(z) dz,$$

где $a = p\mu_1/4 + n/2$. Данное двухвесовое неравенство Харди должно быть выполнено для всех $f \geq 0$. Отсюда, в силу [6] вытекает справедливость (4). Аналогично может быть рассмотрен случай P^+ области Ω. Теорема доказана.

Теорема 2 при наличии оценки (21), полученной по ходу доказательства, может быть установлена стандартным образом.

Доказательство теоремы 3. Достаточность. Пусть условие (7) выполнено. Покажем, что тогда задача

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega_T, \quad u \in H^{0,p}_{w_0}(\Omega_T) \tag{22}$$

имеет только тривиальное решение.

Пусть $\Gamma(t,\tau,x,y)$-функция Грина первой краевой задачи оператора $L = \Delta_y - \partial/\partial\tau$ в P^+ области Ω. В силу интегрального представления

$$u(\tau,y) = \int\limits_{D(t)} \Gamma(t,\tau,x,y)u(t,x)dx,$$

где $D(\Theta) = \{t = \Theta\} \cap \Omega$. При $t < \tau/2$ из оценки (14) леммы 2 получим

$$u(\tau,y) \le c\tau^{-\nu^+/4}t^{\nu^+/4-n/2} \int\limits_{D(T)} |u(t,x)|dx.$$

Отсюда

$$|u(\tau,y)|^p w_0(t)t^b \le c\tau^{-\nu^+p/4} w_0(t) \int\limits_{D(t)} |u(t,x)|^p dx,$$

где $b = -p\nu^+/4 + n/2$. Зафиксируем (τ,y) и проинтегрируем это неравенство по t на интервале $(\delta,\tau/2)$. Тогда, согласно предположению

$$|u(\tau,y)|^p \int\limits_{\delta}^{\tau/2} w_0(t)t^b dt \le c\tau^{-\nu^+p/4} \| u \|_{H^{\frac{1}{2},p}_{w_0}(\Omega_T)} \le c\tau^{-\nu^+p/4}.$$

Значит, в силу (7) для заданных $(\tau,y) \in \Omega_T$ и $\varepsilon > 0$ постоянную δ можно выбрать столь малой, что $|u(\tau,y)| < \varepsilon$, то есть $u \equiv 0$ ввиду произвольности ε и (τ,y).

Необходимость. Пусть теперь (7) не выполнено. Тогда функция

$$u(t,x) = t^{-\nu^+/4} p_1^+\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),$$

где ν^+-первое собственное число, а $p_1^+(\xi)$-первая собственная функция соответствующей задачи (3), удовлетворяет задаче (22) ввиду нарушения (7). Теорема доказана.

Настоящая работа выполнена при содействии Международного научного фонда «Культурная инициатива» и Российской Академии Наук.

1. *Петровский И.Г.* . О решении первой краевой задачи для уравнения теплопроводности // Уч. зап. МГУ. – 1934. – **2**. – С. 55–59.
2. *Ландис Е.М.* , Небходимое и достаточное условие регулярности граничной точки для задачи Дирихле для уравнения теплопроводности // ДАН СССР. – 1969. **185**. *N 3*. – С. 517–520.
3. *Evans L.C., Gariepy R.Z., Wiener's criterion for the heat equation // Arch. Rath. Mech. An. 1982.* – **78**. *N 4. – P. 293–314.*
4. *Михайлов В.П.* , О задаче Дирихле для параболического уравнения // Мат. сборник. – 1963. **63**. *N 1*. – С. 40–64.
5. *Кондратьев В.А* , Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях // Труды ММО. – 1966. – **15**. – С. 400–451.
6. *Muckenhoupt B., Hardy's inequality with weights // Studia Math. – 1972.* – **44**. *N 1. – P. 31–38.*
7. *Ладыженская О.Л., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* , Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М. : Наука, 1967.
8. *Михлин С.Г.* , Курс математической физики. – М. : Наука, 1968.
9. *Владимиров В.С.* , Уравнения математической физики. – М. : Наука, 1976.